81

実数a,b,c,dが$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=1$を満たすとき，
$ad-bc$，a^2+d^2，b^2+c^2の値を求めよ。

（2002　芝浦工業大）

解法のポイント

解答の$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$より，
$(ad-bc)^2+1=1\cdot 1 \quad \therefore ad-bc=0$

これより，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$とおくと・・・

の流れはよいとして，
$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$が思いつかなければ絶望的である。
そこで，この問題を方程式問題という縛りから開放して，
図形と式あるいはベクトルの視点から考えてみる。

解法 1

図形と式の視点：$a^2+b^2=1$と$c^2+d^2=1$から$x^2+y^2=1$を発想する。

点(a,b)，点(c,d)は$x^2+y^2=1$を満たすから，
$(a,b)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$(c,d)=(\cos\beta,\sin\beta)\quad(0\leq\alpha,\beta<2\pi)$とおくと，
$ac+bd=1$より，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=1 \quad \therefore\alpha=\beta$
よって，$(a,b)=(c,d)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$
よって，
$ad-bc=\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0$
$a^2+d^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$
$b^2+c^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
以上より，$ad-bc=0$，$a^2+d^2=1$，$b^2+c^2=1$

解法 2

内積の視点：条件式から内積を発想する。

$\vec{p}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\vec{q}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$とおき，この 2 つのベクトルのなす角を$\theta\ (0\leq\theta\leq\pi)$とする。

$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta=\cos\theta$　・・・①

$\vec{p}\cdot\vec{q}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=ac+bd=1$　・・・②

①，②より，$\cos\theta=1 \quad \therefore\theta=0$
よって，$\vec{p}=\vec{q}$，すなわち$a=c,b=d$
$\therefore ad-bc=ab-ba=0$，$a^2+d^2=a^2+b^2=1$，$b^2+c^2=b^2+a^2=1$
以上より，$ad-bc=0$，$a^2+d^2=1$，$b^2+c^2=1$